

Les homothéties (EG5)

Nous avons déjà vu la leçon « Agrandissements/Réductions (GM3) » et un cas particulier d'agrandissement/réduction, les triangles semblables.

Dans cette leçon, nous allons traduire à l'aide d'une transformation géométrique la notion d'agrandissement/réduction.

Cette transformation s'appelle **l'homothétie**.

Qu'est-ce qu'une homothétie ?

Définition

Considérons un point O .

Transformer une figure par une **homothétie** de centre O , c'est l'agrandir ou la réduire en faisant glisser ses points le long de droites passant par O .

Une homothétie est définie par :

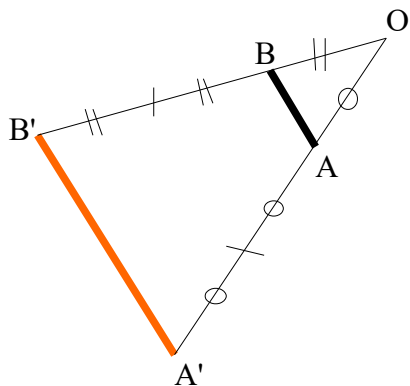
- un **centre**
- un **rapport k** différent de 0.

Exemple 1

Tracer l'image du segment $[AB]$ par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

On fait glisser le segment $[AB]$ le long des demi-droites $[OA]$ et $[OB]$. Le rapport est positif.

*Le segment $[A'B']$ est un **agrandissement** de rapport 3 du segment $[AB]$.*

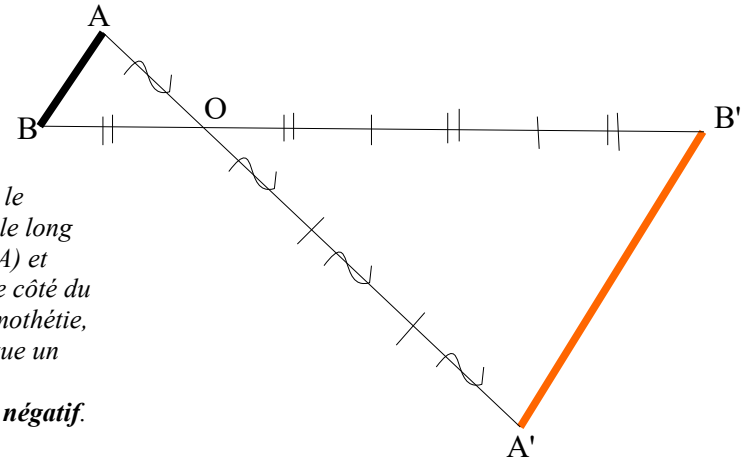


$$\begin{aligned} OB' &= 3 \times OB, \\ OA' &= 3 \times OA \\ A'B' &= 3 \times AB \end{aligned}$$

Comme le rapport est positif alors le segment et son image sont du même côté du centre de l'homothétie.

Exemple 2

Tracer l'image du segment $[AB]$ par l'homothétie de centre O et de rapport - 3.



On fait glisser le segment $[AB]$ le long des droites (OA) et (OB) de l'autre côté du centre de l'homothétie, la figure effectue un demi-tour.

*Le rapport est **négatif**.*

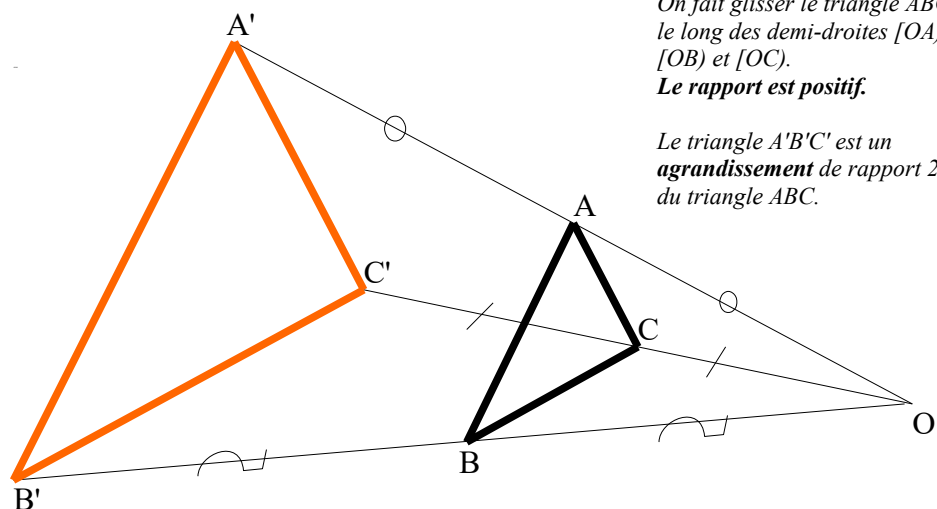
*Le segment $[A'B']$ est un **agrandissement** de rapport 3 du segment $[AB]$.*

$$\begin{aligned} OB' &= 3 \times OB \\ OA' &= 3 \times OA \\ A'B' &= 3 \times AB \end{aligned}$$

Comme le rapport est négatif alors l'image du segment est de l'autre côté du centre de l'homothétie.

Exemple 3

Tracer l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport 2.



On fait glisser le triangle ABC le long des demi-droites [OA), [OB) et [OC).
Le rapport est positif.

Le triangle A'B'C' est un **agrandissement** de rapport 2 du triangle ABC.

$$OB' = 2 \times OB, OA' = 2 \times OA, OC' = 2 \times OC$$

$$A'B' = 2 \times AB, A'C' = 2 \times AC, B'C' = 2 \times BC$$

Comme le rapport est positif alors le triangle et son image sont du même côté du centre de l'homothétie.

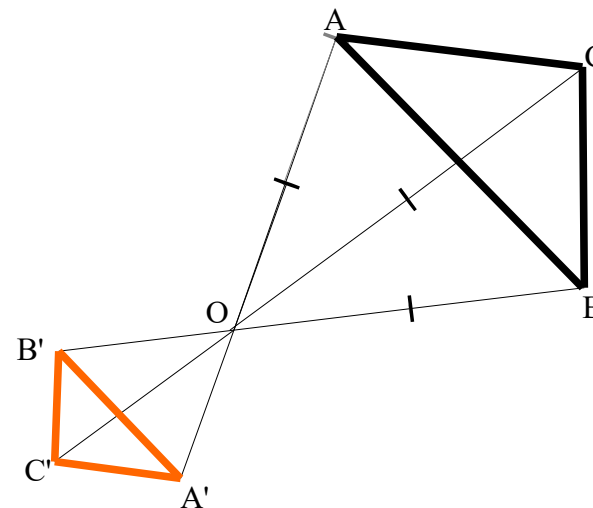
Remarque Les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

Exemple 4

Tracer l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$.

On fait glisser le triangle ABC le long des droites (OA) et (OB) de l'autre côté du centre de l'homothétie, la figure effectue un demi-tour.
Le rapport est **négatif**.

Le triangle A'B'C' est une **réduction** de rapport $\frac{1}{2}$ du triangle ABC.



$$OB' = \frac{1}{2} \times OB, OA' = \frac{1}{2} \times OA, OC' = \frac{1}{2} \times OC$$

$$A'B' = \frac{1}{2} \times AB, A'C' = \frac{1}{2} \times AC, B'C' = \frac{1}{2} \times BC$$

Comme le rapport est négatif alors l'image du triangle est de l'autre du centre de l'homothétie.

Remarque Les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

Propriété

Une figure et son image par une homothétie ont la même forme.
L'homothétie conserve **les alignements et les mesures des angles**.

Propriété

Une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2 .

Nous avons déjà vu cette propriété dans la leçon sur les agrandissements/réductions.

Exemple

Aire de la figure initiale	Homothétie de rapport k	Agrandissement ou réduction	Aire de la figure transformée
10 cm ²	1,5	agrandissement	$1,5^2 \times 10 = 22,5$ cm ²
10 cm ²	0,4	réduction	$0,4^2 \times 10 = 1,6$ cm ²
10 cm ²	- 0,8	réduction	$(-0,8)^2 \times 10 = 6,4$ cm ²
10 cm ²	- 2	agrandissement	$(-2)^2 \times 10 = 40$ cm ²

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
Je dois savoir - la définition d'une homothétie - les propriétés	Je dois savoir : - tracer l'image d'une figure par une homothétie.

Pour compléter la leçon, vous pouvez regarder les vidéos suivantes :

Comment l'image d'un point par une homothétie ?

<https://www.youtube.com/watch?v=BNgizubShAo>

Comment construire l'image d'une figure par une homothétie ?

<https://www.youtube.com/watch?v=4H0YCqT93PE>

Exercice :

<https://www.youtube.com/watch?v=ws4LxlqgK2c>