Exercices dirigés - Calcul littéral – Double distributivité
Identités remarquables (NC5)

Exercice 1 Cet exercice est extrait du livre Myriade 3ème – exercice 15 page 62

Développer et réduire les expressions suivantes :

a. $(x-1)(2x+5)$ b. $(4-2x)(5x-9)$

c. $(-x+1)(x-1)$ d. $(-3-2x)(-6-3x)$

Exercice 2 Cet exercice est extrait du livre Myriade 3ème – exercice 16 page 62

Développer et réduire les expressions suivantes :

a. $4-2x(3x+5)$ b. $(-4\times 3x)(x\times 9)$

c. $(3x+9)^2$ d. $(7x-8)(4x-6)+10$

Exercice 3 Cet exercice est extrait du livre Myriade 3ème – exercice 24 page 63

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre
- Soustraire 2
- Multiplier le résultat par la somme du nombre choisi et de 3
- Ajouter 6 au résultat
- Soustraire le carré du nombre choisi

1. Selon Élie, on retrouve toujours le nombre de départ à la fin du programme.
Faire le test en choisissant -6 comme nombre de départ, puis refaire les calculs en prenant $\frac{4}{7}$ comme nombre de départ.
2. Prouver que l'affirmation d'Élie est vraie.

Exercice 4 Cet exercice est extrait du livre Myriade 3ème – exercice 26 page 63

Voici le cahier de Samy :

$(2x+5)\times(\qquad)=6x^2+33x+45$

Retrouver l'expression sous la tache.

Exercice 5 Cet exercice est extrait du livre Myriade 3ème – exercice 43 page 65

1. Calculer :
a. $2\times 2-1\times 3$ b. $3\times 3-2\times 4$
c. $4\times 4-3\times 5$ d. $8\times 8-7\times 9$
2. Proposer trois autres calculs du même type, puis les effectuer.
Quelle conjecture peut-on faire ?
3. Prouver cette conjecture.

Exercice 6 Cet exercice est extrait du livre Myriade 3ème – exercice 41 page 65

Dire si chacune de ces deux propositions est vraie ou fausse, puis donner une preuve.

- **Proposition 1 :** « La somme de quatre nombres entiers consécutifs est un multiple de 4. »
- **Proposition 2 :** « La somme de cinq nombres entiers consécutifs est un multiple de 5. »

Exercice 7 Cet exercice est extrait du livre Myriade 3ème – exercice 67 page 67

1. Calculer :
a. 7^2-5^2 b. 55^2-53^2 c. 19^2-17^2 d. 11^2-9^2
2.

La différence des carrés de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 8.

Vrai ou faux ? Donner une preuve.

Exercice 8 Cet exercice est extrait du livre Myriade 3ème – exercice 68 page 67

Prouver que, si on choisit le même nombre de départ, on obtient le même résultat final avec ces deux programmes.

Programme A
- Choisir un nombre
- Ajouter 1
- Mettre au carré
- Soustraire le carré du nombre de départ

Programme B
- Choisir un nombre
- Multiplier par 2
- Ajouter 1

Correction ... à regarder une fois que vous avez cherché

Exercice 1

a. $(x-1)(2x+5) = 2x^2 + 5x - 2x - 5$

$= \mathbf{2x^2 + 3x - 5}$

b. $(4-2x)(5x-9) = 20x - 36 - 10x^2 + 18x$

$= \mathbf{-10x^2 + 38x - 36}$

c. $(-x+1)(x-1) = -x^2 + x + x - 1$

$= \mathbf{-x^2 + 2x - 1}$

d. $(-3-2x)(-6-3x) = 18 + 9x + 12x + 6x^2$

$= 6\mathbf{x^2 + 21x + 18}$

Exercice 2

a. $4 - 2x(3x+5) = 4 - 6x^2 - 10x$

$= \mathbf{-6x^2 - 10x + 4}$

b. $(-4 \times 3x)(x \times 9) = -12x \times 9x$

$= \mathbf{-108x^2}$

c. $(3x+9)^2 = (3x+9)(3x+9)$

$= 9x^2 + 27x + 27x + 81$

$= \mathbf{9x^2 + 54x + 81}$

d. $(7x-8)(4x-6) + 10 = 28x^2 - 42x - 32x + 48 + 10$

$= \mathbf{28x^2 - 74x + 58}$

Exercice 3

1. On choisit – 6 comme nombre de départ :

$(-6-2) \times (-6+3) + 6 - (-6)^2 = -8 \times (-3) + 6 - 36$

$= 24 + 6 - 36$

$= \mathbf{-6}$

2. On choisit $\frac{4}{7}$ comme nombre de départ :

$$\left(\frac{4}{7}-2\right)\left(\frac{4}{7}+3\right)+6-\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \left(\frac{4}{7}-\frac{14}{7}\right)\left(\frac{4}{7}+\frac{21}{7}\right)+6-\left(\frac{4}{7}\right)^2$$

$$= \left(\frac{-10}{7}\right)\left(\frac{25}{7}\right)+6-\left(\frac{4}{7}\right)^2$$

$$= \frac{-250}{49}+6-\frac{16}{49}$$

$$= \frac{-250}{49}+\frac{294}{49}-\frac{16}{49}$$

$$= \frac{28}{49}$$

$$= \mathbf{\frac{4}{7}}$$

3. On appelle x un nombre quelconque. Appliquons le programme de calcul au nombre x.

$(x-2) \times (x+3) + 6 - x^2 = x^2 + 3x - 2x - 6 + 6 - x^2$

$= x$

Ainsi l'affirmation d'Elie est vraie.

Exercice 4

On cherche **?** : $(2x+5)(\mathbf{?}) = 6x^2 + 33x + 45$.

Comme $5 \times 9 = 45$ et $2x \times 3x = 6x^2$ alors :

$5 \times 9 = 45$

$\mathbf{(2x+5)(3x+9) = 6x^2 + 33x + 45}$.

$2x \times 3x = 6x^2$

En effet : $(2x+5)(3x+9) = 6x^2 + 18x + 15x + 45$

$= 6x^2 + 33x + 45$

Exercice 5

1. a.

$2 \times 2 - 1 \times 3 = 4 - 3$

$= \mathbf{1}$

b. $3 \times 3 - 2 \times 4 = 9 - 8$

$= \mathbf{1}$

c. $4 \times 4 - 3 \times 5 = 16 - 15$

$= \mathbf{1}$

d. $8 \times 8 - 7 \times 9 = 64 - 63$

$= \mathbf{1}$

2. $9 \times 9 - 8 \times 10 = 81 - 80$

$= \mathbf{1}$

$10 \times 10 - 9 \times 11 = 100 - 99$

$= \mathbf{1}$

$11 \times 11 - 10 \times 12 = 121 - 120$

$= \mathbf{1}$

Conjecture : Pour tout nombre entier x :

$$(x + 1)(x + 1) - x\,(x + 2) = 1$$

3. $(x + 1)\,(x + 1) - x\,(x + 2) = x^2 + x + x + 1 - x^2 - 2x$

$= 1$

Donc la conjecture est vraie.

Exercice 6

- **La proposition 1 est fausse.**

Contre-exemple : Considérons les quatre entiers consécutifs 1, 2, 3 et 4.

La somme de ses entiers est égale à : $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ et 10 n'est pas un multiple de 4.

- **La proposition 2 est vraie.**

Exemple 1 : Considérons les cinq entiers consécutifs 1, 2, 3, 4 et 5.

La somme de ses entiers est égale à : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ et 15 est un multiple de 5.

Exemple 2 : Considérons les cinq entiers consécutifs 5, 6, 7, 8 et 9.

La somme de ses entiers est égale à : $5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35$ et 35 est un multiple de 5.

Plusieurs exemples ne suffisent pas pour démontrer qu'une propriété est vraie. Démontrons cette propriété est vraie dans le cas général.

On appelle x un entier quelconque.

Les quatre entiers qui suivent x sont : $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ et $x + 4$.

La somme de ses entiers est égale à :

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 5x + 10.$$

En factorisant l'expression $5x + 10$, on a : $5x + 10 = 5(x + 2)$.

D'où :

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 5(x + 2).$$

Ainsi la somme des entiers x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ et $x + 4$ est un multiple de 5.

Donc la propriété est vraie.

Exercice 7

1. a. $7^2 - 5^2 = 49 - 25 = \mathbf{24}$

b. $55^2 - 53^2 = (55 - 53) \times (55 + 53) = 2 \times 108 = \mathbf{216}$

c. $19^2 - 17^2 = (19 - 17) \times (19 + 17) = 2 \times 36 = \mathbf{72}$

d. $11^2 - 9^2 = 121 - 81 = \mathbf{40}$

2. Comme $24 = 8 \times 3$, $216 = 8 \times 27$, $72 = 8 \times 9$ et $40 = 8 \times 5$ alors pour les quatre exemples précédents la propriété est vraie.

Démontrons qu'elle est vraie dans le cas général.

On appelle $2x + 1$ un nombre impair quelconque. Le nombre impair consécutif à $2x + 1$ est $2x + 3$.

Calculons $(2x + 3)^2 - (2x + 1)^2$

$$\begin{aligned}(2x + 3)^2 - (2x + 1)^2 &= ((2x + 3) + (2x + 1))((2x + 3) - (2x + 1)) \\ &= (2x + 3 + 2x + 1)(2x + 3 - 2x - 1) \\ &= (4x + 4) \times 2 \\ &= 8x + 8 \\ &= 8(x + 1)\end{aligned}$$

On a utilisé l'identité remarquable.

Donc $(2x + 3)^2 - (2x + 1)^2$ est un multiple de 8.

Ainsi la propriété est vraie !

Remarque On pouvait utiliser également la double distributivité :

$$\begin{aligned}(2x + 3)^2 - (2x + 1)^2 &= (2x + 3)(2x + 3) - (2x + 1)(2x + 1) \\ &= 4x^2 + 6x + 6x + 9 - (4x^2 + 2x + 2x + 1) \\ &= 4x^2 + 6x + 6x + 9 - 4x^2 - 2x - 2x - 1 \\ &= 8x + 8\end{aligned}$$

Exercice 7

On appelle x un nombre quelconque.

Effectuons les deux programmes avec le nombre x.

Programme A

$$\begin{aligned}(x + 1)^2 - x^2 &= ((x + 1) + x)((x + 1) - x) \\ &= (2x + 1) \times 1 \\ &= 2x + 1\end{aligned}$$

On a utilisé l'identité remarquable.

Programme B

$2x + 1$

Ainsi on obtient le même résultat final avec les deux programmes.

Remarque On pouvait utiliser également la double distributivité :

$$\begin{aligned}(x + 1)^2 - x^2 &= (x + 1)(x + 1) - x^2 \\ &= x^2 + x + x + 1 - x^2 \\ &= 2x + 1\end{aligned}$$