Les puissances (NC2)

Les puissances ont été abordées en 4ème. Dans cette leçon, nous allons revoir rapidement les définitions et découvrir quelques propriétés des puissances.

Les mathématiciens ont inventé la notation de puissances pour simplifier la multiplication réitérée d'un même nombre.
On l'utilise dans de nombreux domaines (Astronomie,Physique, Biologie, ……).

1. Qu'est-ce que la puissance d'exposant positif d'un nombre ?

Définition Considérons a un nombre non nul quelconque.

$$\begin{array}{ccc}
 & a^1 = a & \\
\times a & & \div a \\
 & a^2 = a \times a & \\
\times a & & \div a \\
 & a^3 = a \times a \times a & \\
\times a & & \div a \\
 & a^4 = a \times a \times a \times a & \\
\times a & & \div a \\
 & a^5 = a \times a \times a \times a \times a & \\
\times a & & \div a \\
 & a^6 = a \times a \times a \times a \times a \times a &
\end{array}$$

Vocabulaire

12^7 est la puissance d'exposant 7 du nombre 12.

Question : A quoi est égal 12^0 ?

On a envie de dire que $12^0 = 0$. **Et non, c'est faux.** Voici l'explication :

$$\begin{array}{ccc}
 & 12^0 = 1 & \\
\times 12 & & \div 12 \\
 & 12^1 = 12 & \\
\times 12 & & \div 12 \\
 & 12^2 = 12 \times 12 &
\end{array}$$

$12 \div 12 = 1$

Ainsi pour tout nombre non nul a, $a^0 = 1$.

Exemples

$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10$ se lit 10 exposant 4.

$5^2 = 5 \times 5$ se lit 5 exposant 2 ou 5 au carré.

$5^3 = 5 \times 5 \times 5$ se lit 5 exposant 3 ou 5 au cube.

$3{,}4^6 = 3{,}4 \times 3{,}4 \times 3{,}4 \times 3{,}4 \times 3{,}4 \times 3{,}4$ se lit 3,4 exposant 6.

$(-2)^6 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$ se lit -2 exposant 6.

$\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$ se lit $\frac{3}{4}$ exposant 5

Attention

- Des pièges à éviter!

L'exposant 2 porte sur le 3.

$-3^2 = -9$ et $(-3)^2 = 9$

L'exposant 2 porte sur le -3.

L'exposant s'adresse au nombre placé devant ou entre parenthèses.

- **Priorité opératoire**

Ce calcul est prioritaire.

$$5+2^4=5+16$$
$$=21$$

La puissance est prioritaire sur les autres opérations.

2. Qu'est-ce que la puissance d'exposant négatif d'un nombre ?

Considérons l'expression : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$. Écrivons plus simplement cette expression :

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1\times1\times1\times1\times1\times1}{3\times3\times3\times3\times3\times3}$$
$$=\frac{1}{3\times3\times3\times3\times3\times3}$$
$$=\frac{1}{3^6}$$

On l'a vu dans le paragraphe 1.

Au lieu d'écrire $\frac{1}{3^6}$, les mathématiciens ont inventé la notation suivante :

$$\frac{1}{3^6}=3^{-6}\ .$$

Ainsi, on a : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3^6}=3^{-6}$

Définition Considérons a un nombre non nul.

$$a^{-1}=\frac{1}{a^1}=\frac{1}{a}\quad(\ a^1=a\ )$$
$$a^{-2}=\frac{1}{a^2}$$
$$a^{-3}=\frac{1}{a^3}$$
$$a^{-4}=\frac{1}{a^4}$$
etc........

Remarque

- $\frac{1}{3}$ est l'**inverse** du nombre 3 car $\frac{1}{3}\times3=1$.
- $\frac{1}{6}$ est l'**inverse** du nombre 6 car $\frac{1}{6}\times6=1$.

De même :

- $\frac{1}{3^2}=3^{-2}$ est l'**inverse** de 3^2 car $\frac{1}{3^2}\times3^2=1$.
- $\frac{1}{10^5}=10^{-5}$ est l'**inverse** de 10^5 car $\frac{1}{10^5}\times10^5=1$.
- $\frac{1}{6^{20}}=6^{-20}$ est l'inverse de 6^{20} car $\frac{1}{6^{20}}\times6^{20}=1$.

3. Quelles sont les règles de calculs avec les puissances ?

- **Simplifier l'expression suivante** $3^4\times3^5$ **:**

$3^4\times3^5=3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3=\mathbf{3^9}$

De même : $2^6\times2^5=2^{11}$, $10^5\times10^8=10^{13}$, ...

Propriété 1 Considérons a un nombre non nul et, *n* et *p* deux entiers positifs

$$a^n\times a^p=a^{n+p}$$

Exemples

$3^7\times3^3=3^{10}$, $5^4\times5^4=5^8$, $x^{12}\times x^5=x^{17}$

- **Simplifier l'expression suivante** $4^3\times2^3$ **:**

$$4^3\times2^3=4\times4\times4\times2\times2\times2$$
$$=4\times2\times4\times2\times4\times2$$
$$=(4\times2)^3$$
$$=8^3$$

De même : $2^5\times3^5=6^5$, $10^5\times2^5=20^5$, ...

Propriété 2 Considérons a et b deux nombres non nuls et *n* un entier positif.

$$a^n\times b^n=(a\times b)^n$$

Exemples

$2^7\times5^7=10^7$, $5^6\times4^6=20^6$

- **Simplifier l'expression suivante** $\left(5^2\right)^3$ **:**

$$\begin{aligned}\left(5^2\right)^3 &= (5\times5)^3\\ &= 5\times5\times5\times5\times5\times5\\ &= 5^6\end{aligned}$$

De même : $\left(4^3\right)^2=4^6$, $\left(10^5\right)^3=10^{15}$, ….

Propriété 3 Considérons a un nombre non nul et, *n et p* deux entiers positifs.

$$\boldsymbol{\left(a^n\right)^p=a^{n\times p}}$$

Exemples

$\left(6^2\right)^4=6^8$, $\left(7^2\right)^3=7^6$, $\left(x^5\right)^4=x^{20}$

- **Simplifier l'expression suivante** $\frac{6^4}{3^4}$ **:**

$$\begin{aligned}\frac{6^4}{3^4} &= \frac{6\times6\times6\times6}{3\times3\times3\times3}\\ &= \frac{6}{3}\times\frac{6}{3}\times\frac{6}{3}\times\frac{6}{3}\\ &= \left(\frac{6}{3}\right)^4\\ &= 2^4\end{aligned}$$

De même : $\frac{10^7}{5^7}=\left(\frac{10}{5}\right)^7=2^7$, $\frac{16^6}{4^6}=\left(\frac{16}{4}\right)^6=4^6$, ….

Propriété 4 Considérons a et b deux nombres non nuls et, *n* un entier positif.

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}}$$

Exemples

$\frac{9^8}{3^8}=\left(\frac{9}{3}\right)^8=3^8$, $\frac{25^3}{5^3}=\left(\frac{25}{5}\right)^3=5^3$

- **Simplifier les expressions suivantes** $\frac{6^5}{6^3}$ **et** $\frac{6^3}{6^5}$ **:**

$$\begin{aligned}\frac{6^5}{6^3} &= \frac{6\times6\times6\times6\times6}{6\times6\times6}\\ &= 6\times6\\ &= 6^2\end{aligned}$$

On simplifie.

$$\begin{aligned}\frac{6^3}{6^5} &= \frac{6\times6\times6}{6\times6\times6\times6\times6}\\ &= \frac{1}{6\times6}\\ &= \frac{1}{6^2}\\ &= 6^{-2}\end{aligned}$$

On simplifie.

De même : $\frac{10^7}{10^4}=10^3$, $\frac{10^4}{10^7}=10^{-3}$, ….

Propriété 5 Considérons a un nombre non nul et, *n* et *p* deux entiers relatifs.

$$\boldsymbol{\frac{a^n}{a^p}=a^{n-p}}$$

Exemples

$\frac{9^8}{9^4}=9^4$, $\frac{5^3}{5^{10}}=5^{-7}$, $\frac{4^3}{4^{-2}}=4^5$,….

Pour compléter la leçon, vous pouvez regarder les vidéos suivantes :
Cours : https://www.youtube.com/watch?v=IxCzv5FPJ3s
Calcul avec des puissances :
https://www.youtube.com/watch?v=_iwHYbuZ4N8

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
Je dois savoir : **- la définition de la puissance d'un nombre à exposant positif** **- la définition de la puissance d'un nombre à exposant négatif**	**Je dois savoir :** **- calculer des puissances simples.**